CONTROLLO OTTIMALE IN ECONOMIA

(2) $$f(u_1) = Au_1 + B$$

costo di produzione / unità di tempo

(2) bis $$0 \leq u_1 \leq U_1$$

max capacità di prod. con la struttura attuale.

(3) $$\eta(x) = Mx + N$$

costo di immagazzinagg. / unità di temp.

(3) bis $$0 \leq x \leq \bar{X}$$

X è il max livello di scorte compatibile con la struttura attuale

(4) $\vartheta(u_2)$ costo di distribuzione.

Si può interpretare come costo di pubblicità per differenziare i prodotti che non sono differenziabili col prezzo.

L'ipotesi più semplice è che si abbia $\vartheta(u_2)$ lineare, del tipo.

(4)a. $$\vartheta(u_2) = C\,u_2 + D$$

$$C, D > 0$$

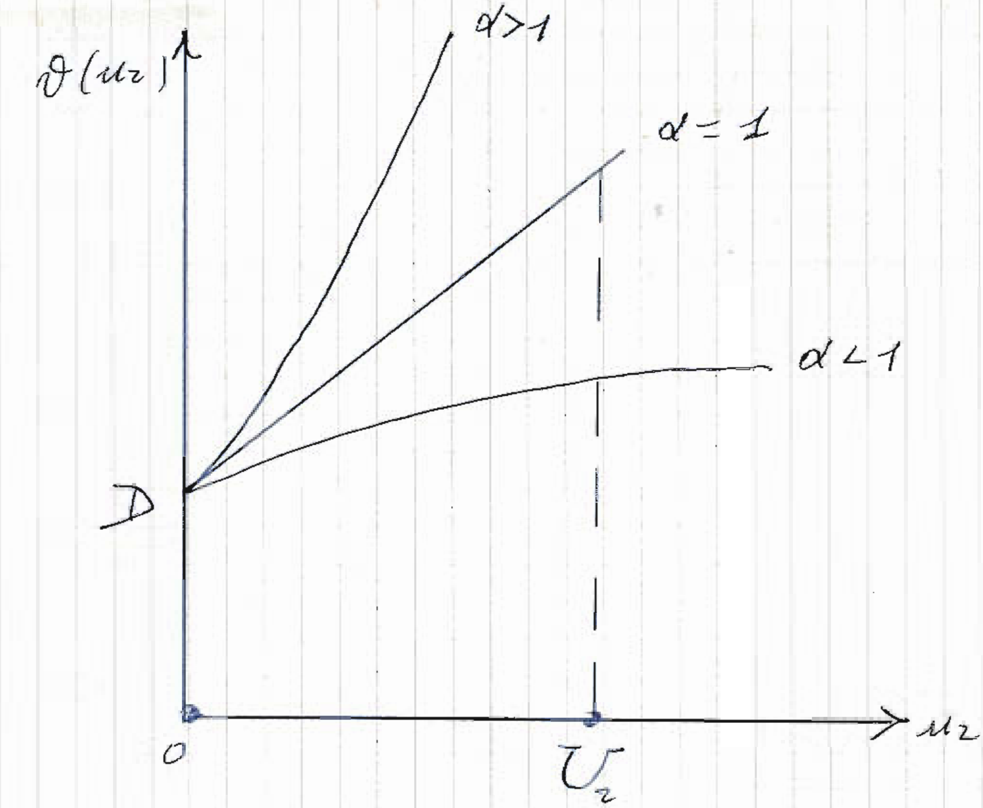
(4)b $$0 \leq u_2 \leq V_2$$

D rappresenta i costi fissi di distribuzione. V_2 la parte massima di mercato raggiungibile (senza cambiare la struttura attuale).

Si può pensare ad una legge più sofisticata del tipo

(4)c $$\vartheta(u_2) = C\,(u_2+1)^{\alpha} + [D-C]$$

che darebbe delle curve dei costi del tipo



Una sola equazione cinematica:

(5) $$\dot{x} = u_1 - u_2$$

velocità di accrescimento delle scorte

Facciamo l'ipotesi semplificativa che non ci sia sconto. Il problema è di rilevare il max della funzione

(j) $$J = \int_0^T I\,dt + p^* x(T)$$

dove si ha:

T = orizzonte temporale (finito)

p^* prezzo previsto di liquidazione delle rendite finali

$$(6) \quad I = p\, u_2 - \gamma(u_1) - \eta(x) - \vartheta(u_2)$$

La funzione di Hamilton H è data da

$$(7) \quad \underline{H} = H + y\,(u_1 - u_2).$$

$$(7)\text{ bis} \quad H = -Mx - N - B \; + \; + u_1 \left\{ y - A \right\} \; + \; + u_2 \left\{ p - y \right\} - \vartheta(u_2)$$

Nella ipotesi semplice $\alpha=1$, date dalle (4)a si ha dunque

$$(7)\text{ter} \quad H = -Mx - N - B - D +$$
$$+ u_1 \{ y - A \} +$$
$$+ u_2 \{ p - y - C \}$$

Equazione nella variabile duale

$$(8) \quad -\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial x} = -M$$

ossia

$$(8)\text{bis} \quad y = Mt + y_0$$

Condizioni iniziali e finali

x_0 livello iniziale delle scorte; con

(9) $X \geq x_0 \geq 0$

$(9)_a$ $\xi = x(T)$

livello finale delle scorte

$X \geq \xi \geq 0$.

Ovviamente se non si fissa il livello finale, ma si lascia tale livello libero si ottiene.

$(9)_b$ $y(T) \cdot x(T) \left\{ X - x(T) \right\} = 0$

avendo fissato solo la superficie di arrivo.

Analisi dei coefficienti di u_1 ed u_2

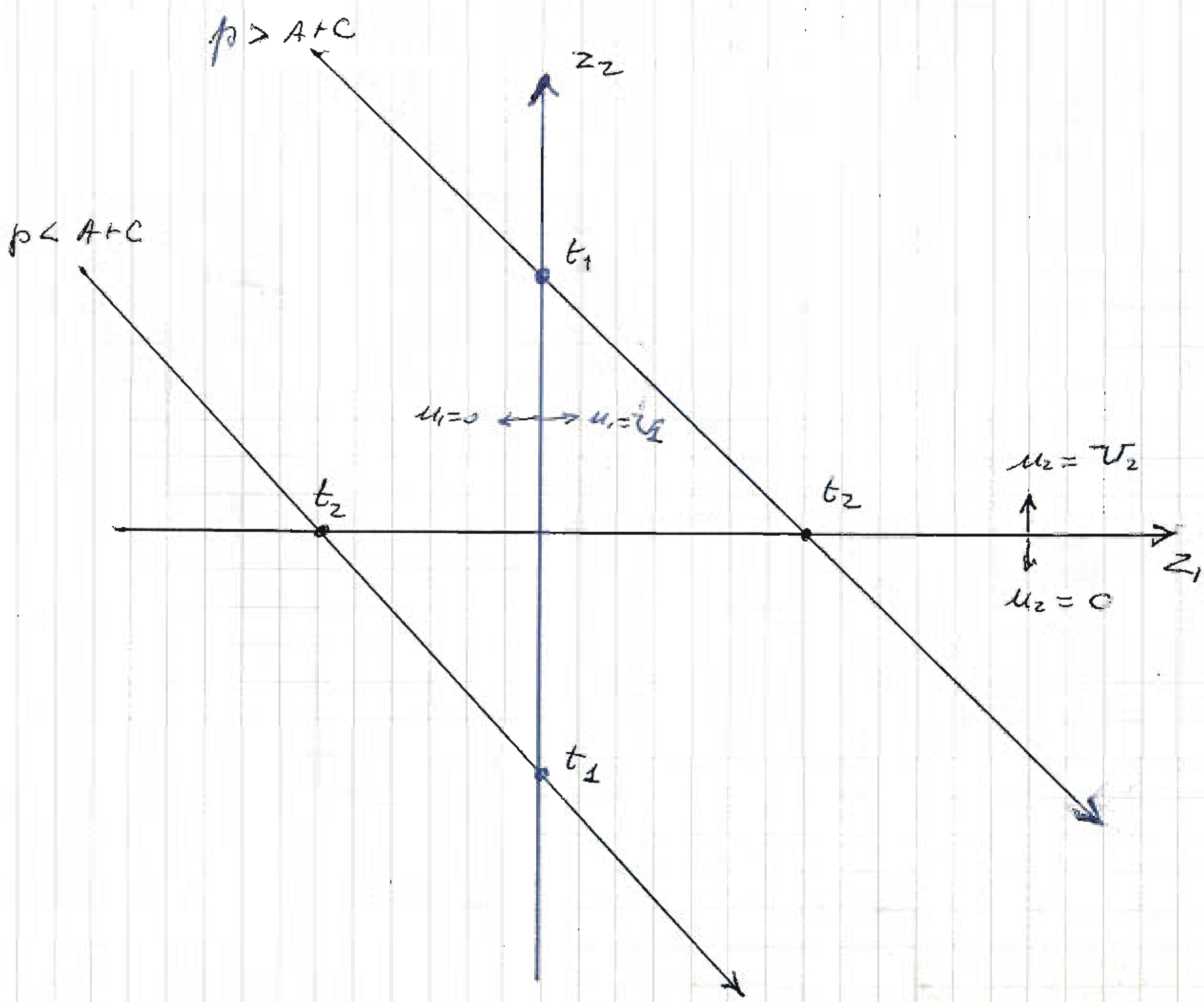
nella funzione H {(7) a pag. 6}

Poniamo

$$(10)\qquad \begin{cases} z_1 = y - A \\ z_2 = p - y - C \end{cases}$$

Si ha quindi

$$(11)\qquad z_1 + z_2 = p - (A + C)$$



N.B. Le rette

$$z_1 + z_2 = p - (A+C)$$

sono percorse in senso discendente al crescere del tempo, in forza della (8)bis (pag. 6) che dà

(8)bis $\quad y = Mt + y_0 .$

Indicando ora con t_1 e t_2 rispettivamente gli istanti in cui z_1 e z_2 cambiano segno si ha

$$(12)\quad \begin{cases} t_1 = \dfrac{1}{M}\left[A - y_0\right] \\[2ex] t_2 = \dfrac{1}{M}\left[p - C - y_0\right] \end{cases}$$

avendosi

$$\begin{cases} (13) \quad t_1 < t_2 \quad \longleftrightarrow \quad p > A+C \\ (14) \quad t_1 > t_2 \quad \longleftrightarrow \quad p < A+C \end{cases}$$

In corrispondenza si hanno quindi gli switchings:

(15) in t_1 u_1 passa da 0 ad V_1

(16) in t_2 u_2 " " V_2 a 0

che danno luogo alle espressioni esplicite di u_1 ed u_2 in funzione del tempo

$$\begin{cases} u_1(t) = V_1 \{1 + \mathrm{sgn}(t - t_1)\}/2 & (17) \\ u_2(t) = V_2 \{1 - \mathrm{sgn}(t - t_2)\}/2 & (18) \end{cases}$$

$\mathrm{sgn}(0) = 0\,!$

che, in forza della (5) [fig. 4] danno luogo alle espressioni di x in funzione di t:

(19) $$x(t) = x_0 - \mathrm{Min}\{t_2 V_2,\, t V_2\} + \mathrm{Max}\{0,\, V_1(t - t_1)\}$$

oppure anche

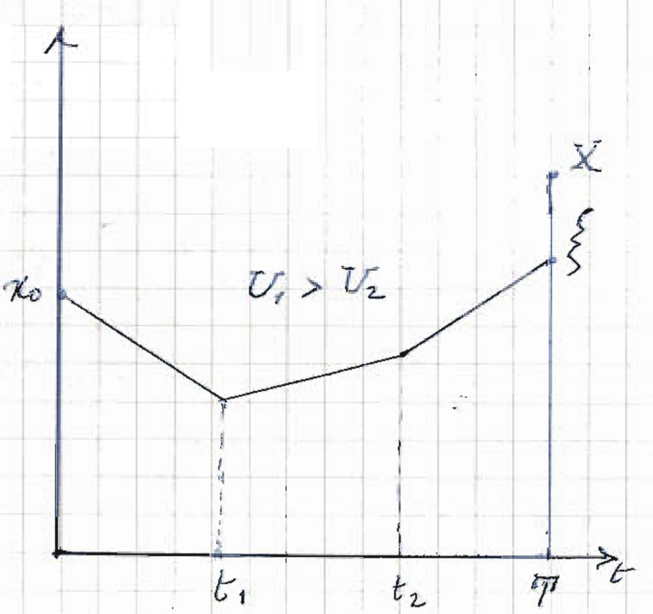
$$(19)\,\text{bis} \qquad x = x_0 + \frac{V_2}{2}\left| t - t_2 \right| - \frac{V_2}{2}(t + t_2) +$$

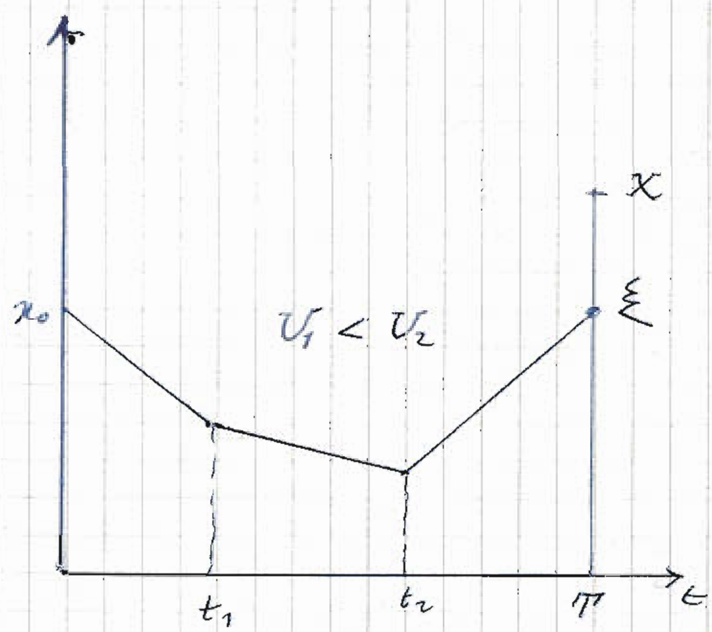
$$+ \frac{V_1}{2}(t - t_1) + \frac{V_1}{2}\left| t - t_1 \right|$$

Con la ovvia condizione (3)bis [pag 2]

Si dà luogo pensando ai due casi seguenti:

a) Vale la (13).



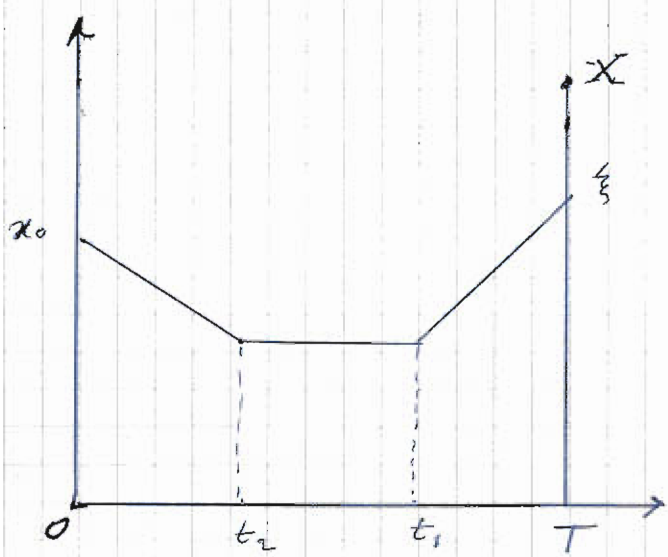


Il primo tratto rettilineo ha pendenza $-v_2$, l'ultimo ha pendenza $+v_1$

Il tratto centrale ha pendenza $v_1 - v_2$

(la figura di destra è solo qualitativa!).

b) Vale la (14).



N.B. Questo caso, benché possibile a priori, appare poco aderente alla realtà. Infatti nell'intervallo centrale si avrebbe

$$u_1 = u_2 = 0$$

e quindi né si produce né si vende!